

MEER SIR ACADEMY

मीर सर एकेडमी

Guiding Ambition to Achievement

CTET PAPER-II

Mathematics & Mathematical Pedagogy

गणित एवं गणित शिक्षाशास्त्र

In-Depth Study Notes | Bilingual Edition (English-Hindi)

Compiled for the students of Meer Sir Academy
Batla House, Jamia Nagar, New Delhi

Contents | विषय-सूची

Topic (English)	विषय (हिंदी)
1. Number System	संख्या पद्धति
2. Fractions, Decimals & Rational Numbers	भिन्न, दशमलव एवं परिमेय संख्याएँ
3. Algebra	बीजगणित
4. Ratio, Proportion & Percentage	अनुपात, समानुपात एवं प्रतिशत
5. Geometry	ज्यामिति
6. Mensuration	क्षेत्रमिति
7. Data Handling	आँकड़ों का प्रबंधन
8. Nature of Mathematics & Logical Thinking	गणित की प्रकृति एवं तार्किक चिंतन
9. Place of Mathematics in the Curriculum	पाठ्यचर्या में गणित का स्थान
10. Language of Mathematics	गणित की भाषा
11. Community Mathematics	सामुदायिक गणित
12. Evaluation through Formative & Summative Assessment (CCE)	मूल्यांकन: सतत एवं व्यापक मूल्यांकन (CCE)
13. Problems of Teaching Mathematics	गणित शिक्षण की समस्याएँ
14. Error Analysis, Diagnostic & Remedial Teaching	त्रुटि विश्लेषण एवं निदानात्मक-उपचारात्मक शिक्षण

★. Key Theorists & Concepts in Mathematics Pedagogy

Theorist	Contribution
Jean Piaget	Cognitive development occurs in stages (Sensorimotor, Pre-operational, Concrete Operational, Formal Operational); children construct knowledge actively.
Jerome Bruner	Three modes of representation — Enactive, Iconic, Symbolic; supports 'spiral curriculum' revisiting concepts with increasing depth.
Zoltan Dienes	Learning mathematics through structured play with concrete materials (e.g. Dienes blocks); principle of multiple embodiment.
Van Hiele (Pierre & Dina)	Five levels of geometric thinking: Visualisation, Analysis, Informal deduction, Formal deduction, Rigor.
Richard Skemp	Distinguished Relational understanding (knowing why) from Instrumental understanding (knowing how/rules only).
George Polya	Four-step problem-solving model: Understand the problem, Devise a plan, Carry out the plan, Look back/Review.
Robert Gagné	Hierarchical learning — simple prerequisite skills must be mastered before complex mathematical skills.

मुख्य सिद्धांतकार एवं अवधारणाएँ (हिंदी)

सिद्धांतकार	योगदान
ज्याँ पियाजे	संज्ञानात्मक विकास चरणों में होता है (संवेदी-प्रचलन, पूर्व-संक्रियात्मक, मूर्त संक्रियात्मक, औपचारिक संक्रियात्मक); बच्चे सक्रिय रूप से ज्ञान का निर्माण करते हैं।
जेरोम ब्रूनर	निरूपण की तीन विधियाँ — क्रियात्मक, चित्रात्मक, प्रतीकात्मक; 'सर्पिल पाठ्यचर्या' का समर्थन जिसमें अवधारणाओं को बढ़ती गहराई से दोहराया जाता है।
ज़ोल्टन डायने	मूर्त सामग्री (जैसे डायने ब्लॉक) के साथ संरचित खेल द्वारा गणित सीखना; बहु-रूपण (multiple embodiment) सिद्धांत।
वैन हील (पियरे व डीना)	ज्यामितीय चिंतन के पाँच स्तर: दृश्यीकरण, विश्लेषण, अनौपचारिक निगमन, औपचारिक निगमन, कठोरता।
रिचर्ड स्केम्प	संबंधात्मक समझ (क्यों जानना) एवं यांत्रिक समझ (केवल कैसे/नियम जानना) में अंतर स्पष्ट किया।
जॉर्ज पोल्या	चार-चरणीय समस्या-समाधान मॉडल: समस्या को समझना, योजना बनाना, योजना पर कार्य करना, पुनरावलोकन करना।
रॉबर्ट गेने	क्रमबद्ध अधिगम — जटिल गणितीय कौशल से पहले सरल पूर्वपेक्षित कौशलों में निपुणता आवश्यक।

★. Quick Formula Reference Sheet

Mensuration Formulae

2D Figures

- Square — Perimeter $4a$, Area a^2
- Rectangle — Perimeter $2(l+b)$, Area $l \times b$
- Triangle — Area $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$
- Circle — Circumference $2\pi r$, Area πr^2

3D Figures

- Cube — Volume a^3 , TSA $6a^2$
- Cuboid — Volume $l \times b \times h$, TSA $2(lb+bh+hl)$
- Cylinder — Volume $\pi r^2 h$, CSA $2\pi rh$
- Sphere — Volume $(4/3)\pi r^3$, SA $4\pi r^2$
- Cone — Volume $(1/3)\pi r^2 h$

क्षेत्रमिति सूत्र (हिंदी संदर्भ)

वर्ग — परिमाण $4a$, क्षेत्रफल a^2 | आयत — परिमाण $2(l+b)$, क्षेत्रफल $l \times b$ | त्रिभुज — क्षेत्रफल $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$
 | वृत्त — परिधि $2\pi r$, क्षेत्रफल πr^2

घन — आयतन a^3 , कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2$ | घनाभ — आयतन $l \times b \times h$ | बेलन — आयतन $\pi r^2 h$ |
 गोला — आयतन $(4/3)\pi r^3$ | शंकु — आयतन $(1/3)\pi r^2 h$

1. Number System

संख्या पद्धति

Types of Numbers

- Natural Numbers (N): 1, 2, 3, 4 ... — used for counting.
- Whole Numbers (W): 0, 1, 2, 3 ... — natural numbers plus zero.
- Integers (Z): ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... — includes negative numbers.
- Rational Numbers (Q): can be expressed as p/q , where $q \neq 0$.
- Irrational Numbers: cannot be expressed as p/q (e.g. $\sqrt{2}$, π).
- Real Numbers (R): union of rational and irrational numbers.

Place Value & Face Value

- Place value = value of a digit based on its position in the number.
- Face value = the digit itself, irrespective of position.
- Indian system: Ones, Tens, Hundreds, Thousands, Lakh, Crore.
- International system: Ones, Tens, Hundreds, Thousand, Million, Billion.

Divisibility Rules

- By 2: last digit is even.
- By 3: sum of digits divisible by 3.
- By 4: last two digits divisible by 4.
- By 5: last digit is 0 or 5.
- By 6: divisible by both 2 and 3.
- By 9: sum of digits divisible by 9.
- By 11: difference of sum of digits at odd and even places is 0 or divisible by 11.

LCM and HCF

- HCF (Highest Common Factor) = largest number dividing two or more numbers exactly.
- LCM (Lowest Common Multiple) = smallest number divisible by two or more numbers.
- Relation: $LCM \times HCF = \text{Product of the two numbers}$.
- Methods: prime factorisation method and long division method.

हिंदी में (In Hindi)

संख्याओं के प्रकार

- प्राकृत संख्याएँ (N): 1, 2, 3, 4 ... — गिनती में प्रयुक्त।
- पूर्ण संख्याएँ (W): 0, 1, 2, 3 ... — शून्य सहित प्राकृत संख्याएँ।
- पूर्णांक (Z): ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... — ऋणात्मक संख्याएँ सम्मिलित।
- परिमेय संख्याएँ (Q): जिन्हें p/q के रूप में लिखा जा सके, जहाँ $q \neq 0$ ।
- अपरिमेय संख्याएँ: जिन्हें p/q रूप में नहीं लिखा जा सकता (जैसे $\sqrt{2}$, π)।
- वास्तविक संख्याएँ (R): परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय।

स्थानीय मान एवं अंकित मान

- स्थानीय मान = संख्या में अंक की स्थिति के आधार पर उसका मान।

- अंकित मान = अंक का वास्तविक मान, स्थिति से स्वतंत्र।
- भारतीय पद्धति: इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, लाख, करोड़।
- अंतरराष्ट्रीय पद्धति: ones, tens, hundreds, thousand, million, billion।

विभाज्यता के नियम

- 2 से: अंतिम अंक सम हो।
- 3 से: अंकों का योग 3 से विभाज्य हो।
- 4 से: अंतिम दो अंक 4 से विभाज्य हों।
- 5 से: अंतिम अंक 0 या 5 हो।
- 6 से: संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो।
- 9 से: अंकों का योग 9 से विभाज्य हो।
- 11 से: सम व विषम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 0 या 11 से विभाज्य हो।

ल.स.प. एवं म.स.प.

- म.स.प. (महत्तम समापवर्तक/HCF) = दो या अधिक संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या।
- ल.स.प. (लघुत्तम समापवर्त्य/LCM) = दो या अधिक संख्याओं से विभाज्य सबसे छोटी संख्या।
- संबंध: $LCM \times HCF = \text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}$ ।
- विधियाँ: अभाज्य गुणनखंड विधि तथा भाग विधि।

2. Fractions, Decimals & Rational Numbers

भिन्न, दशमलव एवं परिमेय संख्याएँ

Types of Fractions

- Proper fraction: numerator < denominator (e.g. $3/4$).
- Improper fraction: numerator $\geq$ denominator (e.g. $7/4$).
- Mixed fraction: whole number + proper fraction (e.g. $1\frac{3}{4}$).
- Like fractions: same denominator; Unlike fractions: different denominators.
- Equivalent fractions: represent the same value (e.g. $1/2 = 2/4$).

Operations on Fractions

- Addition/Subtraction: convert to like fractions using LCM of denominators.
- Multiplication: multiply numerators and denominators directly.
- Division: multiply by the reciprocal of the divisor.

Decimals

- Decimal fractions represent parts of ten, hundred, thousand etc.
- Terminating decimals end after a finite number of digits.
- Non-terminating recurring decimals repeat a digit/group infinitely (e.g. $0.333\dots$).
- Conversion: fraction $\rightarrow$ decimal by division; decimal $\rightarrow$ fraction using place value.

Common Pedagogical Difficulty (Content Insight)

- Children often treat fractions like whole numbers (e.g. think $1/4 < 1/8$ is wrong).
- Concrete models (fraction strips, paper folding, pizza/rotis) build conceptual understanding before symbols.

हिंदी में (In Hindi)

भिन्न के प्रकार

- उचित भिन्न: अंश < हर (जैसे $3/4$)।
- अनुचित भिन्न: अंश $\geq$ हर (जैसे $7/4$)।
- मिश्रित भिन्न: पूर्ण संख्या + उचित भिन्न (जैसे $1\frac{3}{4}$)।
- समान भिन्न: समान हर वाली; असमान भिन्न: भिन्न-भिन्न हर वाली।
- तुल्य भिन्न: समान मान प्रदर्शित करने वाली (जैसे $1/2 = 2/4$)।

भिन्नों पर संक्रियाएँ

- जोड़/घटाव: हरो के ल.स.प. द्वारा समान भिन्न में बदलना।
- गुणा: अंशों तथा हरों को सीधे गुणा करना।
- भाग: भाजक के व्युत्क्रम से गुणा करना।

दशमलव

- दशमलव भिन्न दहाई, सैकड़ा, हजार आदि के भाग प्रदर्शित करती है।
- सांत दशमलव सीमित अंकों के बाद समाप्त होती है।

- असांत आवर्ती दशमलव में अंक/समूह अनंत बार दोहराया जाता है (जैसे 0.333...)|
- रूपांतरण: भिन्न से दशमलव भाग द्वारा; दशमलव से भिन्न स्थानीय मान द्वारा।

सामान्य शैक्षणिक कठिनाई (सामग्री दृष्टि)

- बच्चे प्रायः भिन्नों को पूर्ण संख्याओं जैसा समझते हैं (जैसे गलती से मानना $1/4 < 1/8$)।
- मूर्त सामग्री (भिन्न पट्टियाँ, कागज मोड़ना, पिज़्ज़ा/रोटी) प्रतीकों से पहले संकल्पनात्मक समझ बनाती है।

3. Algebra

बीजगणित

Basic Concepts

- Variable: a symbol (x, y, z) representing an unknown value.
- Constant: a fixed numerical value.
- Algebraic expression: combination of variables, constants and operations (e.g. $3x + 5$).
- Equation: statement of equality involving variables (e.g. $2x + 3 = 7$).
- Coefficient: the numerical factor multiplying a variable.

Laws of Exponents

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)
- $a^{-n} = 1/a^n$

Identities

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Pedagogical Note

- Introduce algebra through patterns and generalisation before formal symbols (as per NCF 2005).
- Use matchstick/dot patterns to help children see 'variable' as a generalised number.

हिंदी में (In Hindi)

मूल अवधारणाएँ

- चर (Variable): अज्ञात मान को दर्शाने वाला प्रतीक (x, y, z)।
- अचर (Constant): एक निश्चित संख्यात्मक मान।
- बीजगणितीय व्यंजक: चर, अचर एवं संक्रियाओं का संयोजन (जैसे $3x + 5$)।
- समीकरण: चर सहित समानता को दर्शाने वाला कथन (जैसे $2x + 3 = 7$)।
- गुणांक: चर को गुणा करने वाला संख्यात्मक कारक।

घातांक के नियम

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)
- $a^{-n} = 1/a^n$

सर्वसमिकाएँ

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

शैक्षणिक बिंदु

- औपचारिक प्रतीकों से पहले प्रतिरूप (patterns) एवं सामान्यीकरण द्वारा बीजगणित का परिचय दें (NCF 2005 अनुसार)।
- 'चर' को सामान्यीकृत संख्या के रूप में समझाने हेतु माचिस/बिंदु प्रतिरूपों का प्रयोग करें।

4. Ratio, Proportion & Percentage

अनुपात, समानुपात एवं प्रतिशत

Ratio

- Comparison of two quantities of the same kind, written $a:b$.
- Ratio has no unit; simplify by dividing by HCF of terms.

Proportion

- Equality of two ratios: $a:b = c:d$, written $a:b :: c:d$.
- Product of extremes = Product of means ($a \times d = b \times c$).
- Direct proportion: one quantity increases as the other increases.
- Inverse proportion: one quantity increases as the other decreases.

Percentage

- 'Per cent' means 'per hundred'; $x\% = x/100$.
- To convert fraction to percentage: multiply by 100.
- Common applications: profit-loss, simple interest, discount.
- Simple Interest = $(P \times R \times T)/100$.

हिंदी में (In Hindi)

अनुपात

- समान प्रकार की दो राशियों की तुलना, $a:b$ के रूप में लिखा जाता है।
- अनुपात की कोई इकाई नहीं होती; पदों के म.स.प. से भाग देकर सरल करें।

समानुपात

- दो अनुपातों की समानता: $a:b = c:d$, इसे $a:b :: c:d$ लिखा जाता है।
- बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल ($a \times d = b \times c$)।
- सीधा समानुपात: एक राशि बढ़ने पर दूसरी भी बढ़ती है।
- व्युत्क्रम समानुपात: एक राशि बढ़ने पर दूसरी घटती है।

प्रतिशत

- 'प्रतिशत' का अर्थ है 'प्रति सौ'; $x\% = x/100$ ।
- भिन्न को प्रतिशत में बदलने हेतु 100 से गुणा करें।
- सामान्य प्रयोग: लाभ-हानि, साधारण ब्याज, छूट।
- साधारण ब्याज = $(P \times R \times T)/100$ ।

5. Geometry

ज्यामिति

Basic Terms

- Point: exact location, no length/breadth.
- Line: straight path extending infinitely in both directions.
- Line segment: part of a line with two endpoints.
- Ray: part of a line with one endpoint, extending infinitely in one direction.
- Angle: formed by two rays sharing a common endpoint (vertex).

Types of Angles

- Acute angle: 0° to 90° .
- Right angle: exactly 90° .
- Obtuse angle: 90° to 180° .
- Straight angle: exactly 180° .
- Reflex angle: 180° to 360° .

Triangles

- By sides: equilateral (all equal), isosceles (two equal), scalene (all unequal).
- By angles: acute, right, obtuse triangle.
- Sum of interior angles of a triangle = 180° .
- Pythagoras theorem (right triangle): $(\text{Hypotenuse})^2 = (\text{Base})^2 + (\text{Height})^2$.

Van Hiele Levels of Geometric Thinking (Pedagogy)

- Level 0 – Visualisation: recognising shapes by appearance.
- Level 1 – Analysis: identifying properties of shapes.
- Level 2 – Informal deduction: relating properties logically.
- Level 3 – Formal deduction: constructing formal proofs.
- Level 4 – Rigor: comparing different axiomatic systems.
- Relevance for CTET: children move through these levels sequentially; teaching must match the child's level.

हिंदी में (In Hindi)

मूल शब्दावली

- बिंदु: सटीक स्थिति, कोई लंबाई/चौड़ाई नहीं।
- रेखा: दोनों दिशाओं में अनंत तक फैला सीधा पथ।
- रेखाखंड: रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिंदु हों।
- किरण: रेखा का वह भाग जिसका एक अंत बिंदु हो, एक दिशा में अनंत तक फैला।
- कोण: उभयनिष्ठ बिंदु (शीर्ष) पर मिलने वाली दो किरणों से बनता है।

कोणों के प्रकार

- न्यून कोण: 0° से 90° तक।
- समकोण: ठीक 90° ।

- अधिक कोण: 90° से 180° तक।
- सरल कोण: ठीक 180° ।
- प्रतिवर्ती कोण: 180° से 360° तक।

त्रिभुज

- भुजाओं के आधार पर: समबाहु (सभी बराबर), समद्विबाहु (दो बराबर), विषमबाहु (सभी असमान)।
- कोणों के आधार पर: न्यूनकोण, समकोण, अधिककोण त्रिभुज।
- त्रिभुज के अंतःकोणों का योग = 180° ।
- पाइथागोरस प्रमेय (समकोण त्रिभुज): $(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लंब})^2$ ।

वैन हील ज्यामितीय चिंतन स्तर (शिक्षाशास्त्र)

- स्तर 0 - दृश्यीकरण: आकृति को बाहरी रूप से पहचानना।
- स्तर 1 - विश्लेषण: आकृतियों के गुणों की पहचान करना।
- स्तर 2 - अनौपचारिक निगमन: गुणों को तार्किक रूप से जोड़ना।
- स्तर 3 - औपचारिक निगमन: औपचारिक प्रमाण बनाना।
- स्तर 4 - कठोरता: विभिन्न स्वयंसिद्ध प्रणालियों की तुलना करना।
- CTET हेतु महत्व: बच्चे इन स्तरों से क्रमशः गुजरते हैं; शिक्षण बच्चे के स्तर के अनुरूप होना चाहिए।

6. Mensuration

क्षेत्रमिति

Perimeter & Area (2D)

- Square: Perimeter = $4a$; Area = a^2 .
- Rectangle: Perimeter = $2(l+b)$; Area = $l \times b$.
- Triangle: Area = $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$.
- Circle: Circumference = $2\pi r$; Area = πr^2 .
- Parallelogram: Area = $\text{base} \times \text{height}$.

Surface Area & Volume (3D)

- Cube: Volume = a^3 ; Total Surface Area = $6a^2$.
- Cuboid: Volume = $l \times b \times h$; TSA = $2(lb+bh+hl)$.
- Cylinder: Volume = $\pi r^2 h$; Curved Surface Area = $2\pi r h$.
- Sphere: Volume = $(4/3)\pi r^3$; Surface Area = $4\pi r^2$.
- Cone: Volume = $(1/3)\pi r^2 h$.

हिंदी में (In Hindi)

परिमाण एवं क्षेत्रफल (द्वि-आयामी)

- वर्ग: परिमाण = $4a$; क्षेत्रफल = a^2 ।
- आयत: परिमाण = $2(l+b)$; क्षेत्रफल = $l \times b$ ।
- त्रिभुज: क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$ ।
- वृत्त: परिधि = $2\pi r$; क्षेत्रफल = πr^2 ।
- समांतर चतुर्भुज: क्षेत्रफल = $\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$ ।

पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन (त्रि-आयामी)

- घन: आयतन = a^3 ; कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$ ।
- घनाभ: आयतन = $l \times b \times h$; कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb+bh+hl)$ ।
- बेलन: आयतन = $\pi r^2 h$; वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r h$ ।
- गोला: आयतन = $(4/3)\pi r^3$; पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$ ।
- शंकु: आयतन = $(1/3)\pi r^2 h$ ।

7. Data Handling

आँकड़ों का प्रबंधन

Measures of Central Tendency

- Mean = Sum of observations ÷ Number of observations.
- Median = middle value when data is arranged in order.
- Mode = value occurring most frequently in the data.

Graphical Representation

- Pictograph: data shown using pictures/symbols.
- Bar graph: data shown using bars of uniform width.
- Histogram: bar graph for continuous class intervals (no gaps).
- Pie chart: circular graph showing data as proportions of 360°.
- Line graph: shows trend/change over time.

हिंदी में (In Hindi)

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप

- माध्य (Mean) = प्रेक्षणों का योग ÷ प्रेक्षणों की संख्या।
- माध्यिका (Median) = क्रम में व्यवस्थित आँकड़ों का मध्य मान।
- बहुलक (Mode) = आँकड़ों में सर्वाधिक बार आने वाला मान।

आलेखीय निरूपण

- चित्रालेख: चित्रों/प्रतीकों द्वारा आँकड़े दर्शाना।
- दंड आलेख: समान चौड़ाई के दंडों द्वारा आँकड़े दर्शाना।
- आयतचित्र (Histogram): सतत वर्ग अंतरालों हेतु दंड आलेख (बिना अंतराल के)।
- वृत्त आलेख: आँकड़ों को 360° के अनुपात में दर्शाने वाला वृत्ताकार आलेख।
- रेखा आलेख: समय के साथ प्रवृत्ति/परिवर्तन दर्शाता है।

8. Nature of Mathematics & Logical Thinking

गणित की प्रकृति एवं तार्किक चिंतन

Nature of Mathematics

- Mathematics is an exact, abstract and logically structured science.
- It is hierarchical — each concept builds upon previously learnt concepts.
- Mathematics uses precise symbols and a universal language.
- It develops through observation, generalisation, verification and proof.
- Mathematics is both a science of numbers/space AND a way of thinking.

Logical Thinking

- Ability to reason systematically, identify patterns, and draw valid conclusions.
- Involves inductive reasoning (specific → general) and deductive reasoning (general → specific).
- Mathematics teaching should foster reasoning, not just memorisation of procedures (as emphasised by NCF 2005).

Characteristics (Common CTET points)

- Precision and accuracy.
- Logical sequencing of concepts.
- Abstractness — dealing with ideas, not just concrete objects.
- Applicability to real life.
- Symbolic representation.

हिंदी में (In Hindi)

गणित की प्रकृति

- गणित एक यथार्थ, अमूर्त एवं तार्किक रूप से संरचित विज्ञान है।
- यह क्रमबद्ध (hierarchical) है – प्रत्येक अवधारणा पूर्व में सीखी अवधारणा पर आधारित होती है।
- गणित सटीक प्रतीकों तथा एक सार्वभौमिक भाषा का प्रयोग करता है।
- यह अवलोकन, सामान्यीकरण, सत्यापन एवं प्रमाण के माध्यम से विकसित होता है।
- गणित संख्याओं/स्थान का विज्ञान होने के साथ-साथ चिंतन की एक विधि भी है।

तार्किक चिंतन

- व्यवस्थित रूप से तर्क करने, प्रतिरूप पहचानने तथा वैध निष्कर्ष निकालने की क्षमता।
- इसमें आगमनात्मक तर्क (विशिष्ट → सामान्य) एवं निगमनात्मक तर्क (सामान्य → विशिष्ट) सम्मिलित हैं।
- गणित शिक्षण को केवल प्रक्रियाओं के याद रखने के बजाय तर्कशक्ति विकसित करनी चाहिए (NCF 2005 अनुसार)।

विशेषताएँ (सामान्य CTET बिंदु)

- यथार्थता एवं शुद्धता।
- अवधारणाओं का तार्किक क्रम।

- अमूर्तता – केवल मूर्त वस्तुओं ही नहीं, विचारों से संबंध।
- वास्तविक जीवन में प्रयोज्यता।
- प्रतीकात्मक निरूपण।

9. Place of Mathematics in the Curriculum

पाठ्यचर्या में गणित का स्थान

Importance

- Mathematics develops logical reasoning, problem-solving and analytical skills.
- It is essential for daily life activities — money, time, measurement.
- It forms the foundation for science, technology, engineering (STEM).
- NCF 2005 goal: 'Mathematisation' of the child's thinking, not mere information transfer.

NCF 2005 Vision for Mathematics Education

- Children learn to enjoy mathematics rather than fear it.
- Children learn important mathematics rather than isolated formulas.
- Mathematics should be seen as something to talk about, communicate, discuss and work upon.
- Focus shifts from valuing mechanical procedures to genuine mathematical thinking.
- Curriculum should engage every child with a sense of success.

हिंदी में (In Hindi)

महत्व

- गणित तार्किक चिंतन, समस्या-समाधान तथा विश्लेषणात्मक कौशल विकसित करता है।
- यह दैनिक जीवन की गतिविधियों – धन, समय, माप – हेतु आवश्यक है।
- यह विज्ञान, प्रौद्योगिकी, इंजीनियरिंग (STEM) की नींव बनाता है।
- NCF 2005 का लक्ष्य: बच्चे की सोच का 'गणितीकरण', न कि केवल सूचना का हस्तांतरण।

गणित शिक्षा हेतु NCF 2005 का दृष्टिकोण

- बच्चे गणित से डरने के बजाय उसका आनंद लेना सीखें।
- बच्चे पृथक सूत्रों के बजाय महत्वपूर्ण गणित सीखें।
- गणित को बात करने, संप्रेषित करने, चर्चा करने एवं कार्य करने योग्य विषय के रूप में देखा जाए।
- यांत्रिक प्रक्रियाओं के मूल्यांकन से हटकर वास्तविक गणितीय चिंतन पर बल।
- पाठ्यचर्या को प्रत्येक बच्चे को सफलता की भावना के साथ संलग्न करना चाहिए।

10. Language of Mathematics

गणित की भाषा

Key Ideas

- Mathematics has its own symbolic and precise language (numerals, signs, formulae).
- Mathematical language is universal — the same symbols are understood across cultures.
- There is often a gap between a child's home language and the formal language of mathematics.
- Teachers should link mathematical vocabulary to the child's spoken/home language first.
- Word problems require both linguistic comprehension and mathematical understanding.

Classroom Implication

- Use informal, everyday language before introducing formal mathematical terms.
- Encourage children to verbalise their mathematical reasoning in their own words.
- Multilingual classrooms benefit from translation and discussion of mathematical terms.

हिंदी में (In Hindi)

मुख्य विचार

- गणित की अपनी प्रतीकात्मक एवं यथार्थ भाषा है (अंक, चिन्ह, सूत्र)।
- गणितीय भाषा सार्वभौमिक है — समान प्रतीक सभी संस्कृतियों में समझे जाते हैं।
- बच्चे की घरेलू भाषा एवं गणित की औपचारिक भाषा में प्रायः अंतर होता है।
- शिक्षकों को गणितीय शब्दावली को पहले बच्चे की बोली/घरेलू भाषा से जोड़ना चाहिए।
- शब्द समस्याओं (word problems) हेतु भाषिक समझ एवं गणितीय समझ दोनों आवश्यक हैं।

कक्षा में निहितार्थ

- औपचारिक गणितीय शब्दों से पहले अनौपचारिक, दैनिक भाषा का प्रयोग करें।
- बच्चों को अपने शब्दों में गणितीय तर्क व्यक्त करने हेतु प्रोत्साहित करें।
- बहुभाषी कक्षाओं में गणितीय शब्दों के अनुवाद व चर्चा से लाभ होता है।

11. Community Mathematics

सामुदायिक गणित

Concept

- Mathematics that exists and is practised informally within a community/culture (also called 'ethnomathematics').
- Examples: local measurement units, market calculations, traditional games, patterns in weaving/rangoli, farming calendars.
- Children come to school already possessing informal mathematical knowledge from their community.

Pedagogical Significance

- Bridges the gap between formal school mathematics and children's everyday experiences.
- Validates and respects children's prior/indigenous knowledge.
- Teachers should connect classroom mathematics to local contexts, occupations, and community practices.
- Encourages relevance, motivation, and meaningful learning.

हिंदी में (In Hindi)

अवधारणा

- वह गणित जो समुदाय/संस्कृति में अनौपचारिक रूप से प्रचलित है (इसे 'एथ्नोमैथमेटिक्स' भी कहते हैं)।
- उदाहरण: स्थानीय माप इकाइयाँ, बाजार की गणनाएँ, पारंपरिक खेल, बुनाई/रंगोली के प्रतिरूप, कृषि कैलेंडर।
- बच्चे विद्यालय आने से पहले ही अपने समुदाय से अनौपचारिक गणितीय ज्ञान लेकर आते हैं।

शैक्षणिक महत्व

- औपचारिक विद्यालयी गणित एवं बच्चों के दैनिक अनुभवों के बीच सेतु का कार्य करता है।
- बच्चों के पूर्व/स्थानीय ज्ञान को मान्यता एवं सम्मान देता है।
- शिक्षकों को कक्षा गणित को स्थानीय संदर्भों, व्यवसायों एवं सामुदायिक प्रथाओं से जोड़ना चाहिए।
- यह सार्थकता, अभिप्रेरणा एवं सार्थक अधिगम को प्रोत्साहित करता है।

12. Evaluation through Formative & Summative Assessment (CCE)

मूल्यांकन: सतत एवं व्यापक मूल्यांकन (CCE)

CCE — Continuous and Comprehensive Evaluation

- Continuous: assessment is regular, spread throughout the year (not only at term-end).
- Comprehensive: covers both scholastic (academic) and co-scholastic (life skills, attitudes) areas.

Formative Assessment

- Conducted during the teaching-learning process; diagnostic in nature.
- Purpose: to provide continuous feedback to improve learning, not just to grade.
- Tools: oral questions, class work, quizzes, projects, worksheets, observation.
- Low-stakes, frequent, and used to modify teaching strategies.

Summative Assessment

- Conducted at the end of a unit, term or year.
- Purpose: to measure the level of learning achievement (evaluative, not developmental).
- Tools: unit tests, term-end examinations.

Key Distinction (Frequently Asked)

- Formative = Assessment FOR learning (ongoing feedback).
- Summative = Assessment OF learning (final measurement).

हिंदी में (In Hindi)

CCE – सतत एवं व्यापक मूल्यांकन

- सतत (Continuous): मूल्यांकन नियमित रूप से, पूरे वर्ष चलता है (केवल सत्रांत में नहीं)।
- व्यापक (Comprehensive): शैक्षिक (scholastic) एवं सह-शैक्षिक (जीवन कौशल, दृष्टिकोण) दोनों क्षेत्रों को समाहित करता है।

रचनात्मक मूल्यांकन (Formative Assessment)

- शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया के दौरान संचालित; निदानात्मक प्रकृति का।
- उद्देश्य: अधिगम सुधारने हेतु सतत फीडबैक देना, केवल ग्रेड देना नहीं।
- उपकरण: मौखिक प्रश्न, कक्षा कार्य, प्रश्नोत्तरी, परियोजनाएँ, वर्कशीट, अवलोकन।
- कम भार वाला, बार-बार होने वाला, तथा शिक्षण रणनीति में परिवर्तन हेतु प्रयुक्त।

योगात्मक मूल्यांकन (Summative Assessment)

- किसी इकाई, सत्र अथवा वर्ष के अंत में संचालित।
- उद्देश्य: अधिगम उपलब्धि के स्तर को मापना (मूल्यांकनात्मक, विकासात्मक नहीं)।
- उपकरण: इकाई परीक्षण, सत्रांत परीक्षाएँ।

मुख्य अंतर (बारंबार पूछा जाने वाला)

- रचनात्मक = अधिगम हेतु मूल्यांकन (सतत फीडबैक)।

- योगात्मक = अधिगम का मूल्यांकन (अंतिम माप)।

13. Problems of Teaching Mathematics

गणित शिक्षण की समस्याएँ

Common Problems

- Math anxiety/phobia — fear of the subject due to abstract nature and past failure.
- Overemphasis on rote memorisation of formulas rather than conceptual understanding.
- Gap between concrete experience and abstract symbolic representation.
- Insufficient use of teaching aids/manipulatives in the classroom.
- Language barrier in understanding word problems.
- Lack of individual attention to slow learners; large heterogeneous classrooms.
- Traditional lecture method dominating over activity-based learning.

Suggested Remedies

- Use concrete-pictorial-abstract (CPA) approach for concept building.
- Incorporate games, puzzles, real-life problems and mathematics laboratories.
- Encourage peer learning and cooperative group work.
- Regular formative assessment to identify and address gaps early.
- Create a non-threatening, error-friendly classroom environment.

हिंदी में (In Hindi)

सामान्य समस्याएँ

- गणित भीति (Math phobia) – अमूर्त प्रकृति एवं पूर्व असफलता के कारण विषय का डर।
- अवधारणात्मक समझ के बजाय सूत्रों के रटने पर अधिक बल।
- मूर्त अनुभव एवं अमूर्त प्रतीकात्मक निरूपण के बीच अंतराल।
- कक्षा में शिक्षण सामग्री/मूर्त उपकरणों का अपर्याप्त प्रयोग।
- शब्द समस्याओं (word problems) को समझने में भाषा संबंधी बाधा।
- धीमी गति से सीखने वालों पर व्यक्तिगत ध्यान की कमी; बड़ी विषम कक्षाएँ।
- क्रियाकलाप-आधारित अधिगम की तुलना में पारंपरिक व्याख्यान विधि की प्रधानता।

सुझाए गए उपचार

- अवधारणा निर्माण हेतु मूर्त-चित्रात्मक-अमूर्त (CPA) उपागम का प्रयोग करें।
- खेल, पहेलियाँ, वास्तविक जीवन समस्याएँ एवं गणित प्रयोगशाला को सम्मिलित करें।
- सहपाठी अधिगम एवं सहयोगात्मक समूह कार्य को प्रोत्साहित करें।
- कमियों को शीघ्र पहचानने हेतु नियमित रचनात्मक मूल्यांकन करें।
- एक निर्भय, त्रुटि-सहिष्णु कक्षा वातावरण बनाएँ।

14. Error Analysis, Diagnostic & Remedial Teaching

त्रुटि विश्लेषण एवं निदानात्मक-उपचारात्मक शिक्षण

Error Analysis

- Systematic study of the mistakes children make, to understand underlying misconceptions.
- Errors are NOT random — they reveal a child's (often logical, but incorrect) thinking process.
- Common error types: place-value errors, procedural errors (wrong algorithm/steps), conceptual errors (misunderstanding a concept), careless/computational errors.
- Example: 'borrowing' errors in subtraction; treating fraction numerator/denominator as separate whole numbers.

Diagnostic Teaching

- Process of identifying the specific nature, cause, and extent of a child's learning difficulty.
- Tools: diagnostic tests, error analysis, interviews, observation of the child's working steps.
- Diagnosis precedes remediation — teach only after correctly identifying the actual gap.

Remedial Teaching

- Teaching designed to correct specific learning difficulties identified through diagnosis.
- Individualised or small-group instruction, using varied strategies/materials from the original teaching.
- Should move at the child's own pace, using concrete materials and positive reinforcement.
- Aim: build correct concepts and confidence, not just repeat the failed method.

हिंदी में (In Hindi)

त्रुटि विश्लेषण

- बच्चों की गलतियों का व्यवस्थित अध्ययन, ताकि अंतर्निहित भ्रान्तियों को समझा जा सके।
- त्रुटियाँ यादृच्छिक नहीं होतीं — ये बच्चे की (प्रायः तार्किक, परंतु गलत) चिंतन प्रक्रिया को उजागर करती हैं।
- सामान्य त्रुटि प्रकार: स्थानीय मान त्रुटियाँ, प्रक्रियात्मक त्रुटियाँ (गलत विधि/चरण), अवधारणात्मक त्रुटियाँ (अवधारणा की गलत समझ), असावधानी/गणनात्मक त्रुटियाँ।
- उदाहरण: घटाव में 'उधार लेने' की त्रुटियाँ; भिन्न के अंश/हर को अलग-अलग पूर्ण संख्या मानना।

निदानात्मक शिक्षण

- बच्चे की अधिगम कठिनाई की विशिष्ट प्रकृति, कारण एवं सीमा की पहचान करने की प्रक्रिया।
- उपकरण: निदानात्मक परीक्षण, त्रुटि विश्लेषण, साक्षात्कार, बच्चे के हल करने के चरणों का अवलोकन।
- निदान उपचार से पहले होता है — वास्तविक कमी सही ढंग से पहचानने के बाद ही शिक्षण करें।

उपचारात्मक शिक्षण

- निदान द्वारा पहचानी गई विशिष्ट अधिगम कठिनाइयों को सुधारने हेतु बनाया गया शिक्षण।
- मूल शिक्षण से भिन्न रणनीतियों/सामग्री का प्रयोग करते हुए वैयक्तिक अथवा लघु-समूह निर्देशन।
- बच्चे की अपनी गति से आगे बढ़ना चाहिए, मूर्त सामग्री एवं सकारात्मक पुनर्बलन के साथ।
- लक्ष्य: सही अवधारणाएँ एवं आत्मविश्वास बनाना, केवल असफल विधि को दोहराना नहीं।